第27卷 第3期 工 程 数 学 学 报 Vol. 27 No. 3
2010年06月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS June 2010

文章编号:1005-3085(2010)03-0441-05

带线性不等式约束的线性模型中线性预测的可容许性*

王浩波， 罗建华

(中南林业科技大学理学院，长沙 410004)

摘 要: 本文刻画了线性模型在线性不等式约束条件下的线性预测的可容许性。我们给出了条件线性可预测变量和线性不等式约束条件下可容许预测的定义，在二次损失函数下，讨论了齐次和非齐次线性预测可容许性的关系，得到了条件线性可预测变量的线性预测是可容许线性预测的充要条件。

关键词: 二次损失；线性不等式约束；条件线性可预测变量；可容许性

分类号: **AMS**(2000) 62J15 **中图分类号**: O212.1 **文献标识码**: A

1 引言

设$\Re$为有限总体，$\Re$的第k个元对应着$p+1$个量：$y_k, x_{k1}, x_{k2}, \cdots, x_{kp}$，这里除$y_k$外都是已知的，$k=1,2,\cdots,n$。记$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)'$，$X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)'$，其中$X_k=(x_{k1},x_{k2},\cdots,x_{kp})'$，$k=1,2,\cdots,n$。

本文将考虑带线性不等式约束的线性模型

$$\begin{cases} y = X\beta + e, \\ E(e)=0, \quad \mathrm{Var}(e)=V, \\ h'\beta \geq 0. \end{cases} \tag{1}$$

这里e为n维随机误差向量，X是任意秩的设计阵，V是已知的对称非负定矩阵，h为p维已知向量，β是p维未知参数向量，$\beta\in\psi\doteq\{\beta: h'\beta\geq 0\}$，$E(\cdot)$和$\mathrm{Var}(\cdot)$分别表示随机向量的期望和方差。

在应用上，当有了样本之后，通常要对y的函数进行预测，对于任意秩有限总体，文献[1]研究了y的线性函数Qy的线性预测的可容许性问题，在一般Gauss-Morkov模型下，给出了线性预测的可容许性定义，并得到了Qy的线性预测是可容许预测的充要条件。

实际问题中，我们处理的模型往往是带约束条件的[2,3]。本文研究了不等式约束下线性模型中线性预测的可容许问题，并在二次损失函数下给出了条件线性可预测变量Qy的线性预测Ly_s(或Ly_s+a)是可容许线性预测的一系列充要条件，这里Q为已知的$k\times n$阶矩阵。

为了预测Qy，根据某个特定的抽样方案，从$\Re$中抽取容量为s的样本$\Re_1$，而$\Re_2=\Re-\Re_1$是容量为r的未被观测部分，其中$r=n-s$，取样后，可重新安排y的元素，使得y、X、V和e有一致的分块，即

$$y=\begin{pmatrix} y_s \\ y_r \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} X_s \\ X_r \end{pmatrix}, \quad V=\begin{pmatrix} V_s & V_{sr} \\ V_{rs} & V_r \end{pmatrix}, \quad e=\begin{pmatrix} e_s \\ e_r \end{pmatrix}.$$

收稿日期: 2008-09-19. **作者简介**: 王浩波(1977年5月生)，男，讲师. 研究方向：统计预测与决策.

***基金项目**: 中南林业科技大学人才引进基金(101-0638).

把 Q 进行相应的分块：$Q=(Q_s \vdots Q_r)$，则 $Qy=Q_sy_s+Q_ry_r$。

记

$$\aleph_0=\left\{Ly_s: L \text{ 是 } k\times s \text{ 的常数矩阵}\right\};$$

$$\aleph=\left\{Ly_s+a: L \text{ 是 } k\times s \text{ 的常数矩阵}, a\in \mathbf{R}^k\right\}.$$

取损失函数

$$L(d,Qy)=(d-Qy)'(d-Qy), \tag{2}$$

风险函数为

$$R(d,Qy)=E\left[(d-Qy)'(d-Qy)\right].$$

本文采用下列记号：A 和 B 都是实矩阵，A' 表示 A 的转置；$A\geq 0\,(A>0)$ 表示 A 对称非负定 (正定)，$A\geq B(A>B)$ 表示 $A-B\geq 0(A-B>0)$；$\mu(A)$ 表示由 A 的列向量张成的线性空间；$\mu^{\perp}(A)$ 表示 $\mu(A)$ 的正交补空间；A^+ 表示 A 的 Moore-Penrose 广义逆，$\mathrm{tr}(A)$ 表示 A 的迹。

2 齐次线性预测的可容许性

本节在模型 (1) 和损失函数 (2) 下，讨论条件线性可预测变量 Qy 的一个齐次线性预测在齐次线性预测类 $\aleph_0$ 中是可容许预测的充要条件。

定义 2.1 对于模型 (1)，若存在 y_s 的线性函数 $d(y_s)$，使得 $E(d(y_s)-Qy)=0$，对一切 $\beta\in\psi$ 成立，则称 Qy 为条件线性可预测变量。

定义 2.2 称 Qy 的预测 $d_1(y_s)$ 优于另一个预测 $d_2(y_s)$，如果 $R(d_1(y_s),\,Qy)\leq R(d_2(y_s),Qy)$，对一切 $\beta\in\psi$ 成立，且存在 $\beta_0\in\psi$，使得上式不等号成立。

预测 $d_0(y_s)$ 称为在 Qy 的预测类 Ω 中是可容许的，如果 $d_0(y_s)\in\Omega$，且在 Ω 中不存在优于 $d_0(y_s)$ 的预测，用记号 $d_0(y_s)\overset{\Omega}{\sim}Qy[\psi]$ 表示，在损失函数 (2) 下，$d_0(y_s)$ 是 Qy 在 Ω 中的可容许预测。

引理 2.1[3] 若 C 是 $\mathbf{R}^p$ 中的一个锥，则对 p 维向量 b 和实数 d，$\beta'b+d\leq 0$, $\beta\in C$ 成立的充要条件是 $b\in C^*$ 且 $d\leq 0$，这里 $C^*=\{\alpha:\alpha'\beta\leq 0,\ \beta\in C\}$ 是 C 的一个共轭锥。

引理 2.2[3] A、B 为任意两个非负定矩阵，d_1、d_2 为两个实数，若 $\beta'A\beta+d_1\leq\beta'B\beta+d_2$, $\beta\in\psi$，则有 $A\leq B$ 且 $d_1\leq d_2$。

定理 2.1 在线性模型 (1) 下，$Ly_s\overset{\aleph_0}{\sim}Qy[\psi]$ 成立的充要条件是在一般 Gauss-Markov 模型下有 $Ly_s\overset{\aleph_0}{\sim}Qy$。

定理证明不难，这里省略。

3 非齐次线性预测的可容许性

本节在二次损失函数下讨论条件线性可预测变量 Qy 的非齐次线性预测 Ly_s+a 在非齐次线性预测函数类 $\aleph$ 中是可容许预测的充要条件。

定理 3.1 在线性模型 (1) 下，$Ly_s+a\overset{\aleph}{\sim}Qy[\psi]$，当且仅当

1) $a\in\mu(LX_s-QX)$；

2) $h'(LX_s-QX)^+a\leq 0$ 或 $h\notin\mu((LX_s-QX)')$；

3) $Ly_s\overset{\aleph_0}{\sim}Qy[\psi]$。

证明　先证必要性。

1)　反设$a \notin \mu(LX_s - QX)$，则可令$a = a_1 + a_2$，其中

$$a_1 \in \mu(LX_s - QX), \quad a_2 \in \mu^{\perp}(LX_s - QX), \quad a_2 \neq 0,$$

则

$$R(Ly_s + a, Qy) - R(Ly_s + a_1, Qy) = a_2' a_2 > 0,$$

这与$Ly_s + a \overset{\aleph}{\sim} Qy[\psi]$矛盾，故$a \in \mu(LX_s - QX)$。

2)　若$h'(LX_s - QX)^+ a \geq 0$且$h \in \mu((LX_s - QX)')$，则存在某个h_0，使得$h = (LX_s - QX)'(LX_s - QX)h_0$，令$b = (LX_s - QX)^+ a - \lambda h_0$，$\lambda > 0$则

$$\begin{aligned} & R\big(Ly_s + (LX_s - QX)b, Qy\big) - R(Ly_s + a, Qy) \\ = & -2\lambda h'\beta - 2\lambda h'(LX_s - QX)^+ a + \lambda^2 h_0'(LX_s - QX)'(LX_s - QX)h_0, \end{aligned}$$

当λ足够小时，由引理2.1可知

$$R\big(Ly_s + (LX_s - QX)b, Qy\big) \leq R(Ly_s + a, Qy),$$

这与$(Ly_s + a) \overset{\aleph}{\sim} Qy[\psi]$矛盾，从而条件2)成立。

3)　由条件1)，可设存在$a_0 \in R^k$，使得$a = (LX_s - QX)a_0$。若$R(Hy_s, Qy) \leq R(Ly_s, Qy)$，则由引理2.2知

$$\begin{aligned} & \operatorname{tr}\big[(H - Q_s)V_s(H - Q_s)' + Q_r V_r Q_r' - 2(H - Q_s)V_{sr}Q_r'\big] \\ \leq & \operatorname{tr}\big[(L - Q_s)V_s(L - Q_s)' + Q_r V_r Q_r' - 2(L - Q_s)V_{sr}Q_r'\big], \end{aligned} \tag{3}$$

$$(HX_s - QX)'(HX_s - QX) \leq (LX_s - QX)'(LX_s - QX), \tag{4}$$

联合(3)、(4)及引理2.2知，对一切$\beta \in \psi$有

$$\begin{aligned} & \operatorname{tr}\big[(H - Q_s)V_s(H - Q_s)' + Q_r V_r Q_r' - 2(H - Q_s)V_{sr}Q_r'\big] \\ & +(\beta + a_0)'(HX_s - QX)'(HX_s - QX)(\beta + a_0) \\ \leq & \operatorname{tr}\big[(L - Q_s)V_s(L - Q_s)' + Q_r V_r Q_r' - 2(L - Q_s)V_{sr}Q_r'\big] \\ & +(\beta + a_0)'(LX_s - QX)'(LX_s - QX)(\beta + a_0), \end{aligned} \tag{5}$$

这意味着对一切$\beta \in \psi$，有

$$R\big(Hy_s + (HX_s - QX)a_0, Qy\big) \leq R(Ly_s + a, Qy),$$

又$Ly_s + a \overset{\aleph}{\sim} Qy[\psi]$，于是

$$R\big(Hy_s + (HX_s - QX)a_0, Qy\big) = R(Ly_s + a, Qy),$$

从而(3)、(5)中等号成立，于是有$R(Hy_s, Qy) = R(Ly_s, Qy)$，这意味着不存在齐次线性预测优于$Ly_s$，因此$Ly_s \overset{\aleph_0}{\sim} Qy[\psi]$。

下证充分性。

任给一预测 Hy_s+b，若 $R(Hy_s+b,Qy)\le R(Ly_s+a,Qy)$，对一切 $\beta\notin\psi$ 成立。以 P_1、P_2 分别表示向线性空间 $\mu(HX_s-QX)$ 和线性空间 $\mu^{\perp}(HX_s-QX)$ 的正交投影阵，$P_1b=(HX_s-QX)b_0$，又由条件1) 知，存在 $a_0\in R^k$，使得 $a=(LX_s-QX)a_0$，则由条件1) 的必要性证明过程可知

$$R\big(Hy_s+(HX_s-QX)b_0,Qy\big)\le R(Hy_s+b,Qy)\le R(Ly_s+a,Qy).$$

因此

$$\begin{aligned}&\operatorname{tr}\big[(H-Q_s)V_s(H-Q_s)'+Q_rV_rQ_r'-2(H-Q_s)V_{sr}Q_r'\big]\\ \le\ &\operatorname{tr}\big[(L-Q_s)V_s(L-Q_s)'+Q_rV_rQ_r'-2(L-Q_s)V_{sr}Q_r'\big]\\ &(\beta+b_0)'(HX_s-QX)'(HX_s-QX)(\beta+b_0)\\ \le\ &(\beta+a_0)'(LX_s-QX)'(LX_s-QX)(\beta+a_0),\end{aligned}\tag{6}$$

由式(6) 及条件3) 可得

$$\begin{aligned}&\operatorname{tr}\big[(L-Q_s)V_s(L-Q_s)'+Q_rV_rQ_r'-2(L-Q_s)V_{sr}Q_r'\big]\\ =\ &\operatorname{tr}\big[(H-Q_s)V_s(H-Q_s)'+Q_rV_rQ_r'-2(H-Q_s)V_{sr}Q_r'\big],\end{aligned}\tag{7}$$

$$(LX_s-QX)'(LX_s-QX)=(HX_s-QX)'(HX_s-QX),\tag{8}$$

联立(5)、(7) 和(8) 三式知对一切 $\beta\in\psi$ 有

$$2\beta'(LX_s-QX)'(LX_s-QX)\big[b_0-(LX_s-QX)^+a\big]b_0'(LX_s-QX)'(LX_s-QX)b_0-a'a\le 0,$$

由上式及引理2.1有

$$(LX_s-QX)'(LX_s-QX)\big[b_0-(LX_s-QX)^+a\big]\in\psi^*,\tag{9}$$

$$b_0'(LX_s-QX)'(LX_s-QX)b_0-a'a\le 0,\tag{10}$$

其中 $\psi^*=\{-\lambda h':-\lambda h'\beta\le 0,\ \lambda\ge 0\}$ 为 ψ 的共轭锥。

因而，由(9) 式可知，存在 $\lambda\ge 0$，使得

$$(LX_s-QX)'(LX_s-QX)\big[b_0-(LX_s-QX)^+a\big]=-\lambda h.\tag{11}$$

当 $\lambda=0$ 时，上式等于零，从而 $(LX_s-QX)b_0=a$。

当 $\lambda>0$ 时，由(11) 式可知 $h\in\mu((LX_s-QX)')$，又由条件2) 知 $h'b_0\le h'(LX_s-QX)^+a$，由此及(10)、(11) 两式可知 $h'(LX_s-QX)^+a\ge 0$，因而 $(LX_s-QX)b_0=a$ 成立。

从而不存在优于 Ly_s+a 的线性预测，即 $Ly_s+a\overset{\aleph}{\sim}Qy[\psi]$。

由定理3.1 和文献[1] 中定理2.2 可得定理3.2。

定理3.2 对于线性模型(1)，若 Qy 是条件线性可预测变量，则在损失函数(2) 下，$Ly_s\overset{\aleph_0}{\sim}Qy[\psi]$ ($k=1$ 的情形) 的充要条件是

1) $a\in\mu(LX_s-QX)$；

2) $h'(LX_s - QX)^+ a \leq 0$，或 $h \notin \mu((LX_s - QX)')$；

3) $\mu(V_s L' - (V_s \vdots V_{sr})Q') \subset \mu(X_s)$；

4)

$$
\begin{aligned}
&(L - Q_s)' X_s C X_s' (L - Q_s) \\
\leq\ &(L' X_s - Q' X)(X_s' T^+ X_s)^- X_s' T^+ V_{sr} Q_r + Q_r' X_r C X_s' (L - Q_s);
\end{aligned}
$$

5) $\mu(G) = \mu(LX_s - QX)$，这里

$$
\begin{aligned}
G =\ &(LX_s - QX) C (LX_s - QX)' \\
&+ (LX_s - QX)\left[(X_s' T^+ X_s)^- X_s' T^+ V_{sr} Q_r' \right] - C X_s' (L - Q_s).
\end{aligned}
$$

注　由题设可知上述各式与广义逆的选择无关。

参考文献：

[1] 喻胜华，徐礼文. 二次损失下线性预测的可容许性[J]. 应用数学学报，2004, 27: 1-12
Yu S H, Xu L W. Admissibility of linear prediction in linear model under quadratic loss function[J]. Acta Math Appl Sinica, 2004, 27: 1-12

[2] Mathew T. Admissibility linear estimation in singular models with respect to restricted parameter set[J]. Commun Statist Theory and Methods, 1985, 14(2): 491-498

[3] Lu C Y, Shi N Z. Admissible linear estimators in linear models with respect to inequality constraints[J]. Linear Algebra and its Applications, 2002, 354: 187-194

Admissibility of Linear Prediction in the Linear Model with Linear Inequality Constraints

WANG Hao-bo,　LUO Jian-hua

(School of Science, Central South University of Forestry and Technology, Changsha 410004)

Abstract: The admissibility of linear predictions in linear models is characterized in this paper. We give the definitions of the conditional linear predictable variable and the admissible prediction with linear inequality constraints. Under the quadratic loss function, the relation between admissibility of inhomogeneous and homogeneous linear predictions is discussed, and some necessary and sufficient conditions for a linear prediction of conditional linear predictable variables to be admissible are obtained.

Keywords: quadratic loss function; linear inequality constraints; conditional linear predictable variable; admissibility

Received: 19 Sep 2008.　**Accepted:** 01 Apr 2009.

Foundation item: The Youth Fund of Central South University of Forestry and Technology (101-0638).